Registo n.° 01/GABINFO-DEPC/2022
Registo n.º 45024/IPI/2021

Artigo original
Volume 1, n.º 1

O Cadete
Revista Científica da Academia Militar
Website da revista: www.am.ac.mz/ocadete

ENSINO E APRENDIZAGEM DO INTEGRAL DE RIEMANN: UMA PROPOSTA DE ABORDAGEM A PARTIR DA TEORIA DE APRENDIZAGEM SIGNIFICATIVA COM AUXÍLIO DO *GEOGEBRA*

Emília Maria José Guiraguira[1]

[1] Major (Mestre), Chefe do Registo Académico da Academia Militar Marechal Samora Machel, Nampula, Moçambique.

Resumo

A aprendizagem significativa do Integral de Riemann é fundamental na formação de oficiais dos cursos de engenharias e afins, pois serve de base para a aprendizagem de diversos conteúdos desses cursos. As dificuldades enfrentadas pelos estudantes na aprendizagem e a metodologia de ensino usada pela maioria dos professores na leccionação deste conteúdo constituíram grande motivação para a realização do presente artigo, que visa contribuir para a melhoria da qualidade de ensino nas disciplinas de Análise Matemática, CÁLCULO entre outras, por meio de novas abordagens metodológicas dos conteúdos, baseadas na Teoria da Aprendizagem Significativa de Ausubel com auxílio do *software Geogebra*. O estudo é de natureza qualitativa e foi realizado na Academia Militar Marechal Samora Machel, onde participaram vinte estudantes e cinco professores. Para a recolha de dados, usamos um teste diagnóstico, actividades de ensino, observações e entrevista. Os resultados da pesquisa indicaram que o *software GeoGebra* contribui significativamente para a compreensão da ideia intuitiva do conceito Integral de Riemann como limite de uma soma, assim como para a melhoria da aprendizagem, a partir da visualização na tela do computador. Com o estudo concluiu-se que o *software GeoGebra* pode ser utilizado nas aulas de Matemática, em particular no ensino e aprendizagem do CÁLCULO, em virtude de apresentar características dinâmicas que despertam, nos estudantes, vontade de aprender e que é muito importante para o rompimento da representação algébrica, conectando-o às representações algébricas e gráficas.

Palavras-chave: Aprendizagem Significativa, Integral de Riemann, *Software GeoGebra*.

Abstract

The meaningful learning of Riemann’s integral is essential to the officer’s training in the courses of Engineering and others, hence functions as the base for the learning of several contents of those courses. The difficulties faced by students in learning the Riemann integral and the teaching methodology used by most teachers in teaching this content constituted a great motivation for the realization of this article. This study aims to contribute to improving the quality of teaching in the subjects of Mathematical Analysis, Calculus among others, through new methodological approaches to content, based on Ausbel's Meaningful Learning Theory with the aid of GeoGebra software. The qualitative study was carried out at the Marshal Samora Machel Military Academy, with the participation of twenty students and five teachers. For data collection, we used diagnostic testing, teaching activities, observations and interview. The survey results indicated that the GeoGebra software significantly contributes to the understanding of the intuitive idea of the Riemann’s Integral concept as a frontier of a sum, as well as to the improvement of learning, from the visualization on the computer screen. With this study it is concluded that the GeoGebra software can be used in Mathematic classes, in particular in teaching and learning Calculus, as it presents dynamic characteristics that awaken students' desire to learn and are very important for disruption with the algebraic representation connecting the algebraic and graphical representations.

Keywords: Meaningful Learning, Riemann Integral, GeoGebra Software.

Informações do Artigo

Histórico:
Recepção: 31 de Abril de 2022
Aprovação: 20 de Outubro de 2022
Publicação: 08 de Dezembro de 2022

Contacto
Emília Maria José Guiraguira arsheless@gmail.com

1. Introdução

O conteúdo Integral de Riemann figura em disciplinas como Cálculo, Análise Matemática, Cálculo Diferencial e Integral (CDI), que servem de base para diversos cursos superiores ligados tanto às Engenharias, Ciências Exactas, como às Sociais.

Particularmente, nos cursos de Engenharias ministrados na Academia Militar Marechal Samora Machel (AM), os seus planos curriculares incluem a disciplina de Análise Matemática II, em que se trabalha o conceito do Integral de Riemann.

A importância do ensino e aprendizagem de integrais na formação de oficiais na AM é inquestionável, pois este conteúdo representa uma ferramenta imprescindível na aprendizagem de conteúdos subsequentes tais como Integrais Múltiplas, Curvilíneas de Superfície e Equações Diferenciais que servem de suporte para a leccionação de vários conteúdos curriculares nestes cursos.

Durante a lecionacção da disciplina de Análise Matemática na AM, foi possível perceber que a aprendizagem do Integral de Riemann caracteriza-se como um processo polémico e traumático para os estudantes do primeiro ano, uma vez que apresentam dificuldades de compreensão do conceito, o que tem contribuído para o fraco desempenho na disciplina e consequente reprovação bem como mudança de curso. Tal como referem Oliveira e Reis (2017), as dificuldades tornam-se bastante visíveis neste conteúdo, por apresentar um alto grau de abstração e a necessidade de representações gráficas e/ou algébricas, motivos esses considerados por académicos como os mais difíceis.

As dificuldades que os estudantes apresentam na aprendizagem do conceito Integral de Riemann podem estar relacionadas com a forma como são “transmitidos” os conteúdos, visto que os professores valorizam mais metodologias tradicionais ou tecnicistas que são consideradas por (Fontes, 2021, p. 15-16) pouco estimulantes e não eficazes, pois priorizam aulas expositivas seguidas de resolução e repetição de exercícios, com valorização na acumulação de informações e na reprodução de fórmulas e conceitos.

Nas leituras efectuadas, foi possível perceber que a preocupação com o processo de ensino e aprendizagem do Cálculo Integral não é exclusivo da AM, nem mesmo do Ensino Superior moçambicano (Mateus, 2014), pois há pesquisas internacionais, tais como de Barufi (1999), Villarreal (1999), Melo (2002), Richit (2010), Silva (2017), Menoncini (2018), Fontes (2021), que reportam dificuldades de aprendizagem nesta área de conhecimento.

Estes autores observaram, em suas pesquisas, que a metodologia adoptada pelos professores valoriza a memorização de técnicas, regras e algoritmos. Essa situação enquadra-se no que Ausubel et al. (1980) denominam por aprendizagem mecânica onde, segundo (Moreira, 2016), o estudante reproduz conhecimentos memorizados sem significado, ou os aplica mecanicamente a situações conhecidas e os esquece rapidamente.

Para reverter este cenário é necessária uma reflexão profunda sobre o papel do professor, na sala de aulas de matemática, pois, tal como refere Silva (2017), o professor de Matemática precisa trabalhar a questão da introdução do ensino conceitual do CDI para que haja um entendimento correcto do que é feito e porque é feito, sem se confundir com o ensino mecânico das demonstrações que comumente acontecem.

Neste contexto, o ensino do Integral de Riemann torna-se um desafio para os professores de Matemática da AM, havendo necessidade de optarem por estratégias de ensino que tornem os estudantes autónomos e protagonistas do seu próprio conhecimento, das quais destaca-se, neste artigo, o uso de *softwares* educacionais.

É nesta perspectiva que apresentamos neste artigo o *software* Geogebra como uma ferramenta para o ensino e aprendizagem do Integral de Riemann de forma significativa. Esta ideia baseia-se na teoria de aprendizagem significativa (TAS), na visão de Ausubel et al. (1980), que descreve os mecanismos pelos quais ocorre a aquisição e retenção de significados, sob o ponto vista cognitivista, onde o estudante deve ter uma disposição favorável para aprender.

Desta forma, o estudo buscou responder ao seguinte problema de pesquisa: Que contributo o uso do *software GeoGebra* pode trazer para o ensino e aprendizagem do Integral de Riemann?

Tendo em conta as dificuldades apresentadas pelos estudantes da AM na aprendizagem do Integral de Riemann e a pertinência de as superar, este artigo tem como objectivo geral o seguinte: Analisar o contributo do *software GeoGebra* no ensino e aprendizagem do Integral de Riemann.Para a materialização deste objectivo foram definidos os seguintes objectivos específicos:

a) identificar os conhecimentos prévios dos estudantes em relação a alguns conceitos básicos relacionados com Integrais de Riemann;
b) realizar actividades de ensino com auxílio do *software GeoGebra*;
c) explorar, nas actividades realizadas, evidências de ocorrência da aprendizagem significativa do conceito Integral de Riemann.

2. Teoria de Aprendizagem Significativa de Ausubel

A TAS, proposta por David Paul Ausubel na década de 60, teve a colaboração de Novak e Hanesian. Ausubel propõe uma explicação teórica do processo de aprendizagem, sob o ponto de vista cognitivista, embora reconheça a importância da experiência afectiva, (Moreira, 2011).

Na TAS de Ausubel pressupõe-se que um novo conhecimento (conceito, ideia, proposição) adquire significado para o estudante, quando se estabelece uma interacção com as ideias preexistentes na sua estrutura cognitiva, sendo o conceito mais importante desta teoria o de aprendizagem significativa.

Apesar de o foco principal da TAS de Ausubel ser a aprendizagem significativa, Ausubel et al. (1980) definem a aprendizagem mecânica e afirmam não existir uma distinção dicotómica entre as duas aprendizagens, considerando que elas fazem parte de um *continuum* em que, em uma extremidade, temos a aprendizagem mecânica e em outra temos a significativa.

Por exemplo, a simples memorização de fórmulas e regras para o cálculo do Integral de Riemann estaria situada em um dos extremos desse *contínuum* (o da aprendizagem mecânica), enquanto a aprendizagem da relação entre os conceitos, áreas de figuras planas, limites de funções e integral de Riemann estariam no outro extremo (o da aprendizagem significativa). Na sala de aulas, o que devemos procurar, como professores, é trabalhar o mais próximo possível da extremidade da aprendizagem significativa.

A TAS de Ausubel está constantemente voltada para a aprendizagem tal como ela ocorre na sala de aulas, Moreira (2011), visto que proporciona uma contribuição importante para a compreensão do processo de ensino e aprendizagem, constituindo-se como um instrumento importante para os professores, pois preocupa-se com a natureza, condições, resultados e avaliação da aprendizagem.

Por um lado, a ideia mais importante da Teoria de Ausubel e as possíveis implicações, para o ensino e aprendizagem, resume-se na seguinte proposição: "Se tivesse que reduzir toda a Psicologia Educacional a um só princípio, diria o seguinte: o factor isolado mais importante que influencia a aprendizagem é aquilo que o aprendiz já sabe. Averigúe isso e ensine-o de acordo" (Ausubel et al., 1978 cit. em Moreira, 2016).

Da proposição acima, é notório que, para Ausubel, o conhecimento prévio do estudante é fundamental para que o professor possa organizar estratégias didácticas que permitam facilitar a aprendizagem. Neste contexto, adverte-se que o professor deve fazer uma listagem das ideias prévias do estudante com o objectivo de o ensinar de acordo, identificando os conceitos organizadores básicos e utilizando recursos e princípios que facilitem a aquisição da estrutura conceitual da matéria de ensino de uma maneira significativa (Moreira, 2011).

3. Ensino e aprendizagem do CDI e o uso de *softwares* educacionais

Na revisão bibliográfica efectuada, foi possível perceber que a preocupação com o ensino e aprendizagem do CDI não é recente. Tal como referem Silva (2017) e Fontes (2021) há tempos que o ensino do CDI vem sendo alvo de questionamento quanto à metodologia de ensino adoptada pelos professores, o alto índice de reprovações e as dificuldades de aprendizagem.

Autores como Barufi (1999), Villarreal (1999), Melo (2002) e Richit (2010), Mateus (2014), Fontes (2021) realizam pesquisas em cursos superiores, sobre o ensino e aprendizagem do CDI, onde observaram que a metodologia adoptada pelos professores tende a ser a tradicional, isto é, suas aulas valorizam a memorização, a aplicação de técnicas, regras e algoritmos.

Barufi (1999), ao realizar sua pesquisa sobre a construção/negociação de significados em aulas de CDI, constatou que os professores apresentam uma vasta lista de problemas e exercícios, muitas vezes, repetitivos, onde o estudante acaba memorizando os processos de resolução sem nenhuma significação dos conceitos.

Por outro lado, Villarreal (1999) observou, em sua pesquisa, que o ensino de Cálculo é alicerçado numa prática metodológica "tradicional" que é baseada em modelos da exposição teórica em que o professor apresenta as definições, teoremas, exemplos e exercícios, reduzindo a aprendizagem à memorização de uma série de técnicas, regras procedimentos e algoritmos.

Com esta prática metodológica, os professores têm a convicção de que o conteúdo foi ensinado e os estudantes têm a convicção de que o conteúdo foi aprendido (Melo, 2002).

Richit (2010) alerta que aulas tradicionais, pautadas apenas na exposição e apresentação dos conteúdos, dificilmente estimulam e favorecem a aprendizagem dos estudantes, pois eles acabam não se envolvendo afectivamente com a disciplina e, muitas vezes, questionam sua importância dentro do curso por não entenderem suas finalidades e suas aplicações práticas.

Estas práticas metodológicas, apresentadas e criticadas pelos autores acima, vigoram na AM e nos preocupam como docentes, daí a necessidade de se reflectir no ensino e aprendizagem das disciplinas que envolvem conceitos do CDI, visto que as aulas continuam dependendo das explanações do professor e os conteúdos são apresentados, aos estudantes, de forma mecânica.

Assim, uma das tentativas de modificação desse quadro seria a utilização de *softwares* educacionais como ferramentas didácticas nas aulas de CDI.

3.1. Uso de *softwares* educacionais no ensino e aprendizagem do CDI

Durante os anos 80, surgiu entre muitos matemáticos uma crescente preocupação com a qualidade de aprendizagem dos estudantes no Cálculo. Tal como afirma Richit (2010), esta preocupação conduziu ao movimento da Reforma do CÁLCULO nos Estados Unidos, propondo a integração da tecnologia como uma maneira de tornar os conceitos mais significativos para um maior número de estudantes.

Autores como Barufi (1999), Machado (2008), Marin (2009), Mateus (2014), Alves (2016), Oliveira & Reis (2017), Menoncini (2018) sugeriram, em suas pesquisas, a introdução de métodos computacionais no ensino de CDI com mais ênfase ao uso de *softwares* educacionais matemáticos, para facilitar a compreensão dos conceitos.

Por um lado, de acordo com Menoncini (2018), o uso do computador com *softwares* matemáticos tem ampliado as possibilidades de transformação visual de figuras, permitindo explorar propriedades e relações matemáticas.

Por outro lado, Oliveira e Reis (2017) destacam que a dinâmica da utilização de um *software* pode motivar o estudante a pesquisar, experimentar e procurar novas soluções relacionadas a um problema. Estes autores referem ainda que, em relação ao conceito Integral, o estudante pode a partir do *software* construir gráficos, partições, realizar cálculo de somas inferiores e superiores.

Esta ideia é apoiada por (Marin, 2009), ao afirmar que a tecnologia se tem constituído um recurso didáctico muito importante no ensino do CÁLCULO e sua utilização tem sido muito recomendada por pesquisadores da Educação Matemática, pelo facto de permitir ao professor explorar diversos conceitos matemáticos e representações algébricas e geométricas de forma rápida e eficaz.

Tendo em vista a importância do uso de *softwares* educacionais no ensino e aprendizagem do CÁLCULO, escolheu-se para essa pesquisa o *GeoGebra* pelo facto de se tratar de um software de acesso livre e gratuito, com uma interface amigável, que possibilita trabalhar de forma conjunta as representações algébrica e geométrica, além de fornecer ferramentas interessantes para uma exploração dinâmica de conteúdos de Integral de Riemann.

O *GeoGebra* fornece ferramentas interessantes para uma exploração dinâmica de conteúdos de Integrais de Riemann (Alves, 2016; Mateus, 2018, Fontes, 2021), contribuindo, deste modo, para a visualização e experimentação na construção deste conceito.

Mateus (2018) considera o *GeoGebra* uma ferramenta adequada para o ensino e aprendizagem da Matemática, pois apresenta potencialidades gráficas e algébricas que auxiliam no desenvolvimento do conteúdo de ensino e possibilitam realçar o significado do conteúdo da aprendizagem. Este e outros autores assumem a ideia de que, ao explorar o *software GeoGebra*, este torna-se um factor de modificação à compreensão dos conceitos e uma importante ferramenta de mediação pedagógica.

Deste modo, nossa percepção, advinda das abordagens dos autores, leva-nos a acreditar que os recursos tecnológicos do *GeoGebra* (os recursos de visualização gráfica e animação) têm potencial para contribuir na melhoria do processo de ensino e aprendizagem do Integral de Riemann, pois possibilitam a ressignificação dos conceitos e proporcionam o equilíbrio entre o processo gráfico e algébrico.

4. Metodologia

Tendo em vista a obtenção de dados de forma descritiva, o contacto directo da pesquisadora com o objecto de estudo, a descrição das ideias ou opiniões dos participantes do estudo, (Oliveira, 2016), a pesquisa ancora-se numa abordagem qualitativa, que não tem como foco a quantidade de indivíduos, mas considera, principalmente, o indivíduo com suas complexidades, limitações e leva em conta sua inserção e interação com o meio (D'Ambrósio, 2008).

Para compreensão do objecto de estudo, tomou-se uma perspectiva interpretativa, com a finalidade de conhecer a realidade tal como ela é vista pelos actores que nela intervêm directamente, (Ponte, 2006), interpretando as opiniões dos estudantes, obtidas através da interacção no Laboratório de Informática, durante a resolução das actividades de ensino voltadas para o processo de ensinar e aprender, de forma significativa, Integrais de Riemann, usando o *software GeoGebra* como ferramenta.

Para a recolha de dados usaram-se como instrumentos, um teste diagnóstico, a observação, a entrevista e actividades de natureza exploratório-investigativas. O teste diagnóstico foi aplicado, aos estudantes, com a finalidade de obter algumas informações a respeito dos conhecimentos prévios destes em relação ao cálculo de áreas e a construção de gráficos de funções.

Com vista a proporcionar uma maior aproximação entre o pesquisador e o fenómeno pesquisado, assim como de descrever os aspectos cognitivos observados no ambiente de aprendizagem, realizou-se uma observação participante que ajudou a compreender as manifestações dos estudantes na realização das actividades sobre Integrais de Riemann no Laboratório de Informática.

Para obter mais informações, a pesquisa recorreu à entrevista semi-estruturada, tanto para professores como para estudantes. A entrevista dirigida aos professores visava obter informações sobre suas concepções em relação à verificação dos conhecimentos prévios dos estudantes, assim como da utilização de recursos computacionais nas aulas de Análise Matemática, em particular do Integral de Riemann.

A entrevista dirigida aos estudantes visava trazer informações sobre suas manifestações em relação à Matemática e o nível de conhecimento, no que diz respeito aos computadores e ao *software GeoGebra*, assim como obter informações a respeito das conjecturas geradas durante a realização das actividades de laboratório.

As actividades de natureza exploratório-investigativas definidas, por Miskulin et al. (2007), como sendo aquelas actividades ou problemas nas quais os estudantes envolvem-se em um processo de investigação de soluções, buscando estratégias próprias, experimentando conjecturas e hipóteses a respeito de diversas partes que compõem o problema. Foram elaboradas e desenvolvidas de modo a auxiliar aos estudantes a explorarem por meio do *software GeoGebra* os conceitos relacionados ao Integral de Riemann, de forma significativa.

Estas actividades permitiram, tanto ao estudante como à pesquisadora, apurar o nível de percepção do conceito em estudo, pois envolviam questionamentos e reflexões dos conteúdos e das representações gráficas, com vista a permitir que os estudantes expressassem o que era visualizado por meio de palavras, uma vez que, de acordo com Barufi (1999), a construção de significados é viabilizada através da linguagem.

A análise de dados da pesquisa iniciou com a transcrição literal dos áudios das entrevistas, tendo em conta algumas normas apresentadas por Marcuschi (2007). Posteriormente, as transcrições foram editadas, com vista a suprimir as repetições e erros gramaticais de modo a deixar o texto mais claro bem como proporcionar informações directamente relacionadas aos objectivos da pesquisa.

Assim, a análise do material recolhido seguiu um processo rigoroso frente às fases definidas por Bardin (2016), nomeadamente: Pré-análise; Exploração do material e Tratamento dos resultados.

Neste contexto, foi feita a organização dos dados por meio de categorias que traduzem as ideias chaves veiculadas pelos dados recolhidos.

5. Resultados e Discussão

Os dados recolhidos, foram, minuciosamente, analisados buscando uma melhor compreensão das informações dadas pelos participantes da pesquisa.

Assim, procurou-se analisar o sentido e significado das respostas dos participantes, mediante à compreensão, das suas opiniões nas questões de reflexão, nas construções das figuras e nas entrevistas.

Deste modo, na discussão dos resultados, fez-se a triangulação dos dados, obtidos por meio de entrevistas dirigidos aos professores e estudantes, assim como da observação das actividades de ensino realizadas no Laboratório de Informática, tendo em conta as seguintes categorias: conhecimentos prévios necessários para a aprendizagem do Integral de Riemann, uso de *softwares* matemáticos na sala de aulas,e actividades realizadas com auxílio do *software GeoGebra*

5.1. Conhecimentos prévios necessários para a aprendizagem do Integral de Riemann

Nesta categoria, procurou-se compreender dos professores aspectos relacionados com a verificação dos conhecimentos prévios dos estudantes. Também procurou-se identificar, nos estudantes, se possuíam conhecimentos prévios necessários para a aprendizagem do conceito Integral de Riemann.

O teste diagnóstico, submetido aos estudantes, mostrou que, apesar de alguns, na sua minoria, terem respondido algumas questões correctamente, a maioria destes não conseguiu identificar as figuras e mostraram desconhecer as fórmulas para o cálculo de área, assim como tiveram dificuldades na construção do gráfico da função dada, como se pode notar nas Figuras 1, 2 e 3.

Figura 1. Resolução apresentada no cálculo da área do trapézio

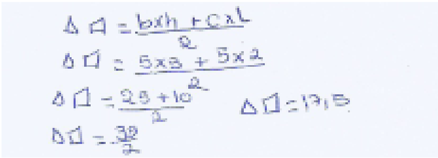


Figura 2: Cálculo de área do triângulo e trapézio

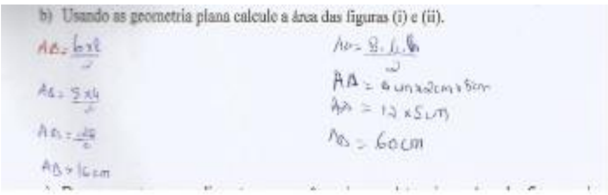
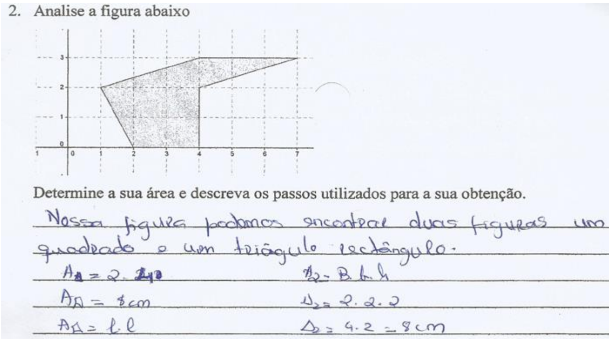
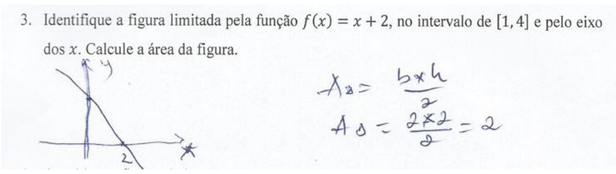


Figura 3: Cálculo de área de figuras planas



Nas Figuras 1, 2 e 3, os estudantes deviam aplicar os conhecimentos da geometria plana para calcular a área do triângulo e do trapézio, mas apresentam uma deficiência de conhecimentos básicos (fórmula para o cálculo da área, leitura de dados, operações básicas) para o efeito.

Figura 4. Gráfico da função $f(x) = x + 2$



Na Figura 3 as dificuldades incidiram na construção do gráfico da função linear, um conteúdo que o estudante vem aprendendo desde a 8ª classe.

Por um lado, os erros cometidos pelos estudantes no teste diagnóstico levaram-nos a perceber que estes não possuíam conhecimentos prévios necessários para dar continuidade com a aprendizagem do Integral de Riemann, antes de se fazer uma revisão sobre alguns conceitos.

Por outro lado, os professores afirmaram ser pertinente a verificação dos conhecimentos prévios dos estudantes para a introdução do novo conteúdo (Integral de Riemann), como se pode ver nos trechos seguintes:

> *Considero pertinente, porque temos que consolidar as bases para melhor partida* (P_5).
>
> *Acho uma boa iniciativa, porque os estudantes podem relacionar a informação anterior com o novo tema, contribuindo para melhor aproveitamento* (P_1).
>
> *É importante na avaliação de conhecimentos para a introdução do novo tema* (P_2).

Apesar de os professores terem noção da pertinência da verificação dos conhecimentos prévios dos estudantes antes de se introduzir o novo conteúdo, alguns confundem-nos com o conteúdo que antecede a integral de Riemann no programa de ensino em vigor na Instituição. Os trechos abaixo retratam o posicionamento dos professores P_2 e P_3:

> *Quando vou introduzir a integral de Riemann, tenho que certificar se eles perceberam como se calcula a integral indefinida* (P_2).
>
> *Antes de introduzir nova matéria, procuro ver o que o estudante sabe. No caso do integral de Riemann, é necessário que o professor verifique se os estudantes sabem calcular primitivas de funções* (P_3).

Acredita-se que os professores apresentaram o conceito de primitiva como conhecimento prévio, pelo facto de estes não usarem conceitos relacionados com a partição de intervalos e somas de Riemann, na introdução do Integral de Riemann, bem como pelo facto de, nos programas de ensino, este conceito ser antecedido pelo integral indefinido.

Outros professores referiram-se à derivada, como conhecimento prévio que o estudante deve possuir para aprender de forma significativa o conceito integral de Riemann, por considerar que o integral é operação inversa da derivada, como é o caso do P1 e P4:

> *(...) se o aluno percebeu o cálculo de derivadas, não terá dificuldades de perceber o integral de Riemann, pois são operações inversas* (P_1).
>
> *A derivada é aplicada no cálculo de primitivas. (...) para aprender o integral de Riemann, o aluno precisa ter conhecimentos sobre derivadas* (P_4).

A ideia de considerar a noção de derivada como conhecimento prévio para aprendizagem do Integral de Riemann é criticada por Richit (2010), ao afirmar que as ideias iniciais de cálculo são de origem geométrica, mas as instituições de ensino dão ênfase ao aspecto algébrico, o que se distancia da forma como este conceito foi construído.

Assim, a aplicação da TAS de Ausubel torna-se uma alternativa para uma possível melhoria na compreensão do conceito Integral de Riemann por considerar que, teoricamente, os estudantes ao ingressarem no Ensino Superior já possuem um conhecimento prévio sobre funções, gráficos e suas aplicações no quotidiano, visto que o estudo de funções é conteúdo proposto nos programas curriculares de Matemática do Ensino Secundário.

5.2. Uso de *softwares* matemáticos na sala de aulas

Procurou-se, nesta categoria, apresentar os resultados sobre o uso de *softwares* educacionais matemáticos na sala de aulas e sua contribuição para o ensino e aprendizagem do Integral de Riemann.

Os resultados da pesquisa mostraram que a maioria dos estudantes tem usado o computador, no seu dia-a-dia, mas não usam este recurso nas aulas de Análise Matemática e não sabem da existência de *softwares* educacionais para o ensino de matemática.

No entanto, todos os professores também foram unânimes em afirmar que o uso de *softwares* educacionais, no ensino da Matemática, pode contribuir para a melhoria do processo de ensino e aprendizagem, como se pode notar nos depoimentos seguintes:

> *Podem sim, se as instituições de ensino empenharem-se também na capacitação de professores na área de TICs* (P_3).
>
> *Pode contribuir, porque vai facilitar a compreensão de todo o trabalho a efectuar, mas precisa saber usar* (P_5).

Concordamos com estes professores, pois, por mais que a instituição disponha de salas equipadas com recursos computacionais, não basta apenas incentivar o seu uso nas aulas de matemática, sem que haja um programa de formação de professores sobre como usar estes recursos didácticos na sala de aulas.

Os professores afirmaram ainda que o uso de *softwares* educacionais matemáticos pode contribuir para a flexibilidade do ensino, dinamismo nas aulas e facilitação da aprendizagem tornando a compreensão dos conteúdos mais eficaz:

> *Contribui com mais relevância para a flexibilidade do ensino e aprendizagem e também facilita a compreensão de todo cálculo matemático* (P_2).
>
> *Contribui, pois pode facilitar, no caso do Integral de Riemann, visualizar áreas e volumes de certos corpos sólidos menos compreensíveis, quando representados no plano* (P_1).
>
> *O uso do software pode melhorar a produtividade no ensino onde os estudantes apresentam maiores dificuldades como na interpretação de gráficos* (P_4).

Estes depoimentos vão ao encontro da ideia de Moreira (2016) que afirma que o professor deve ensinar utilizando recursos e princípios que facilitam a aquisição da estrutura conceitual da matéria de ensino de maneira significativa.

Apesar de os professores terem noção sobre a contribuição dos *softwares* no ensino e aprendizagem da matemática, a maioria destes não usa esses recursos nas aulas, continuando a optar por uma metodologia de ensino predominantemente expositiva.

Marin (2009) chama-nos a atenção, quanto a este aspecto, ao afirmar que o facto de os professores não utilizarem as TICs nas aulas de CÁLCULO pode estar relacionado, entre outros factores, com a sua formação, que de maneira geral não contempla um estudo aprofundado sobre o ensino com o uso das TICs.

Na visão de Ponte (2003), os professores de Matemática precisam usar ferramentas das TICs em suas aulas incluindo *softwares* educacionais específicos da disciplina, no sentido de auxiliar o estudante na compreensão do que está sendo estudado, uma vez que alguns conceitos matemáticos são dinâmicos e de difícil compreensão, quando se usa quadro e giz.

Portanto, percebeu-se, com a pesquisa, a pertinência de se introduzir o uso dos *softwares* matemáticos para a realização das actividades de ensino nas aulas de Matemática, tal como recomenda o programa de ensino da disciplina em que se lecciona o integral de Riemann na AM.

5.3. Actividades realizadas com auxílio do *software GeoGebra*

Nesta categoria, apresentamos os resultados das conjecturas geradas durante a realização de actividades no Laboratório de Informática, onde exploramos as evidências de ocorrência da aprendizagem significativa do Integral de Riemnn.

Na primeira actividade realizada com o *software*, alguns estudantes apresentaram dificuldades ao manipular o *GeoGebra* uma vez que era o seu primeiro contacto, sendo que todos conseguiram fazer construções, utilizar as propriedades (cor e espessura) para modificar as características das rectas e polígonos.

Apesar desta actividade objectivar apenas o trabalho com a construção de pontos, rectas e polígonos, muitos estudantes sentiram-se à vontade e exploraram outros comandos do software, tendo, no final, trazido muita motivação e despertado neles o interesse de aprender mais sobre o *GeoGebra*.

Na segunda actividade, a partir da visualização dos gráficos e usando a propriedade animação, os estudantes foram capazes de perceber o comportamento de funções e fazer uma descrição do que iam observando na tela do computador.

Para Villarreal (1999), o processo de visualização tem um papel fundamental na aprendizagem, visto que os aspectos visuais, algébricos e verbais são complementares no processo de aprendizagem da Matemática.

Portanto, percebemos, com a realização desta actividade, que o *software GeogGebra* é um recurso didáctico que facilita a compreensão do conteúdo a partir da visualização, manipulação e desperta, no estudante, a capacidade de conjecturar e tirar conclusões a partir daquilo que observa na tela do computador.

Esta ideia é partilhada por Oliveira e Reis, (2017), ao afirmarem que a utilização de *softwares*, nas aulas de CDI, pode significar um rompimento com o ensino de alguns conceitos trabalhados quase que exclusivamente por noções algébricas e simbólicas, dificultando, assim, a visualização e a experimentação das actividades.

Na terceira actividade, os estudantes construíram gráficos com o *Geogebra* e analisaram as características da função dada, o intervalo de integração e o conceito integral associado à área da região abaixo ou acima da curva no intervalo dado.

Usando os recursos selector e animação, apresentados pelo *Geogebra*, os estudantes tiveram a oportunidade de aumentar e diminuir o número de rectângulos abaixo e acima da curva e comparar os resultados obtidos, tendo conjecturado que o valor encontrado correspondia ao valor do integral de Riemann no intervalo dado.

No decorrer desta actividade foi possível verificar que os estudantes, a partir dos seus conhecimentos prévios sobre cálculo de áreas e funções, conseguiram conceituar o integral de Riemann assim como calcular correctamente as áreas das funções propostas, utilizando o *software Geogebra* e a ideia de aproximações sucessivas.

Com as actividades realizadas, no *GeoGebra*, foi possível verificar que o *software* ajudou os estudantes na construção de gráficos e, a partir da visualização na tela do computador, eles perceberam que calcular o Integral de Riemann, num dado intervalo, é encontrar o valor da área da região compreendida entre a função e o eixo dos x, tal como refere Mateus (2018), que o *GeoGebra* estimula a curiosidade dos estudantes nas actividades de exploração matemática.

De um modo geral, durante a realização de actividades no laboratório de Informática, os estudantes analisaram as características das funções dadas e elaboraram conjecturas que permitiram o cálculo do valor exacto da área limitada pelas funções e o eixo dos x por meio de aproximações sucessivas usando as somas de Riemann, facto que nos leva a crer que apreenderam o conceito integral de Riemann com auxílio do *software Geogebra* de forma significativa.

Após a realização de actividades de ensino com o auxílio do *software GeoGebra*, questionou-se aos estudantes se o uso do *software GeoGebra* contribuiu na melhoria de sua aprendizagem, pelo que foi notório, nas respostas de alguns estudantes, a satisfação pelo uso do *software GeoGebra*:

> *Contribuiu porque, através do software conseguimos visualizar gráficos, a partir de uma função encontramos outras mudando parâmetros e isso foi bom.*
> *Pode contribuir sim, pois levando em conta o que é a Matemática para alguns estudantes, não sendo uma coisa fácil de resolver, com ajuda do GeoGebra tudo ganha cores e melhora a percepção.*
> *O software alargou mais a minha concepcão sobre integrais e não só uma vez que não calcula somente integrais também visualiza todos os gráficos.*

Com estes e outros depoimentos dos estudantes, percebemos que o uso do *GeoGebra* pode contribuir para a sua aprendizagem, principalmente, no que tange à visualização de gráficos.

Quanto a este aspecto, a literatura mostra que a visualização através da tela do computador dá possibilidade de elaborar um conjunto de argumentos (conjecturas) e ainda utilizá-los para resolver problemas, permitindo aos estudantes construir e relacionar as várias representações da informação e construir conceitos matemáticos (Machado, 2008).

As afirmações dos estudantes mostram, claramente, que as actividades com o *GeoGebra* mudaram sua postura em relação ao cálculo do Integral de Riemann, o que nos leva a concordar com Marin (2009) que afirma que, com o uso das TIC´s, os estudantes alteram a forma de agir, pensar e questionar, isto é, os estudantes são levados de uma forma rápida a testar coisas diferentes, a buscar novas descobertas, a observar propriedades, a testar parâmetros, a investigar de maneira diferente da que estão habituados.

> *As aulas foram excelentes, deu para aprender mais e descobrir determinadas coisas ou pequenos segredos que não nos são revelados na sala de aulas.*
> *Foi uma coisa bonita e nova para mim, nunca imaginei que com auxílio do computador pudesse calcular Integrais de Riemann.*

Este aspecto mostra a predisposição do estudante em aprender uma das condições fundamentais para a ocorrência da aprendizagem significativa (Ausubel et al., 1980), pois o envolvimento contribui para a autonomia do estudante e criatividade na resolução de problemas (Silva, 2017; Fontes, 2021).

Em geral, a ideia de que o uso do *software GeoGebra* contribui para a aprendizagem do conceito Integral Riemann é partilhada por Richit (2010) ao afirmar que, actualmente, vivenciamos um momento, no âmbito da Educação Matemática, em que as possibilidades advindas da utilização de *softwares* educacionais ampliam a investigação matemática a qual envolve representações que perpassam o campo algébrico e caminham para dimensão gráfica e ou geométrica.

6. Proposta de construção do conceito Integral de Riemann com auxílio do *software GeoGebra*

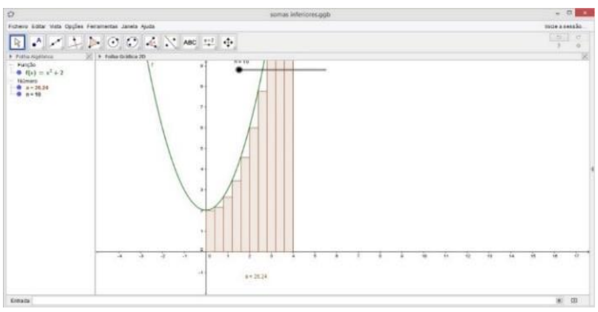
Os resultados da pesquisa mostraram que, usando o *software GeoGebra*, os estudantes foram capazes de representar graficamente as funções, identificar a região e os limites de integração e calcular o valor do Integral por meio de aproximações sucessivas.

Estes resultados levam-nos a concordar com Oliveira e Reis (2017), quando afirmam que as tecnologias devem objectivar, dentre outras coisas, construir conceitos, investigar e significar soluções numéricas, pois a dinâmica da utilização de um *software* pode motivar o estudante a pesquisar, experimentar e procurar novas soluções relacionadas a um problema. É neste contexto que propomos que o professor de Matemática leccione suas aulas, usando, como recurso, o *software GeoGebra* aliado à TAS de Ausubel.

Consideremos a função $f(x) = ax^2 + b$, com $a = 1; b = 2,$ definida no intervalo $[0,4]$. Calculemos o valor do Integral, usando uma ideia que se aproxima ao método de exaustão, que é a aproximação da área pretendida através da soma de pequenas áreas de rectângulos. Para calcular o valor do integral da função $f(x)$ com auxílio do *GeoGebra* deve-se:

a) Inserir um controle deslizante chamado n, com intervalo de 0 a 1000 e incremento 1 na janela de visualização;
b) Inserir no campo de entrada do *GeoGebra* a função $f(x) = x^2 + 2$;
c) Inserir o comando Soma Inferior [f,0,4,n] ou Soma Superior [f,0,4,n], no campo de entrada, onde f é a função dada, 0 e 4 extremos à esquerda e à direita do intervalo dado (limites de integração) e n o controle deslizante criado;

Figura 5: Soma inferior da função $f(x) = x^2 + 2$, no intervalo [0,4]

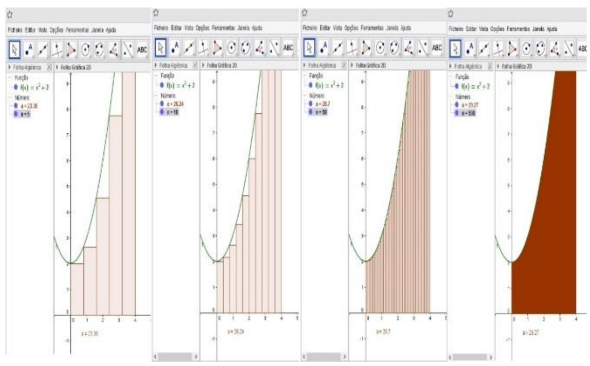


A Figura 5 possibilita a visualização da representação algébrica e gráfica da função, podendo a partir deste exemplo, fazer-se perguntas orientadoras aos estudantes, tais como:

a) Mova o n e observe e descreva o que acontece com a soma das áreas abaixo da curva. O que significa o valor de n?
b) O que acontece quando aumentamos ou diminuímos o valor de n?
c) O que se pode observar na soma das áreas dos 10 rectângulos em relação à soma das áreas dos 60 rectângulos? E quando n é infinito?
d) Qual seria o valor de n para que a soma inferior se aproxime da área exacta?
e) Existe alguma restrição para o valor de n?

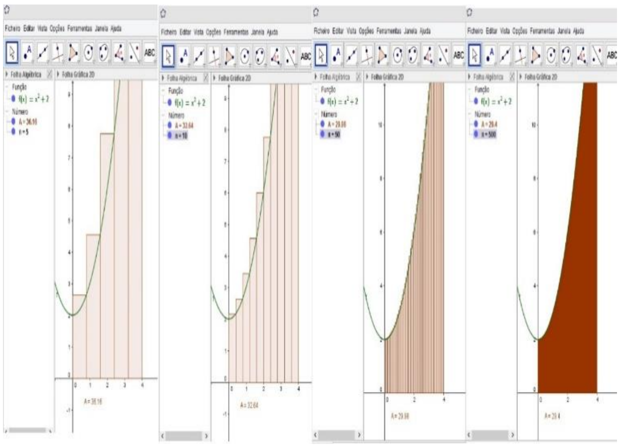
Com esta mediação, o estudante pode, a partir do *software*, interagir com o gráfico e reflectir sobre o comportamento da área abaixo da curva, ao mudar os parâmetros, onde irá verificar que, quando o número de rectângulos aumenta ou tende para o infinito, o limite da soma das pequenas áreas tende ao valor exacto do integral.

Figura 6: Área da função $f(x) = x^2 + 2$, no intervalo [0,4], inserindo cinco, dez, cinquenta e quinhentos retângulos abaixo da curva.



Na soma superior, quanto maior for o número de rectângulos, o valor da soma de Riemann diminui e o limite das somas das pequenas áreas aproxima-se ao valor exacto do Integral de Riemann.

Figura 7: Área da função $\boldsymbol{f(x) = x^2 + 2}$, no intervalo $[\mathbf{0}, \mathbf{4}]$, inserindo cinco, dez, cinquenta e quinhentos retângulos acima da curva



A partir das Figuras 6 e 7, pode-se concluir que, à medida que o número de rectângulos aumenta, tanto na soma inferior como na soma superior, o valor das duas somas tende a ser o mesmo e o limite da soma das pequenas áreas aproxima-se ao valor exacto do Integral de Riemann ou área total do polígono. Portanto, pode-se conjecturar que a área correspondente ao valor do integral está compreendida entre a soma inferior e a soma superior, isto é, a $soma\ inferior\ < Integral\ < soma\ superior$.

A interacção *software*-estudante possibilita que o estudante construa o conceito Integral de Riemann, através das somas de pequenas áreas de rectângulos que se encontram abaixo ou cima da curva que representa o gráfico da função dada. Esta forma de calcular as somas de Riemann, no *GeoGebra*, assemelha-se à expressão $S_n = m_1h_1 + m_2h_2 + \cdots + m_nh_n$, onde m é a altura e $h = x_i - x_{i-1}$ é a base dos rectângulos formados abaixo ou acima da curva num dado intervalo, apresentada por Melo (2002:69), assim como a expressão $S_n = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x$, apresentada por Stewart (2009:346) em que $f(x_i)$ e Δx são respectivamente a altura e a base do rectângulo obtido por meio da partição de um intervalo $[a, b]$, com n subintervalos de comprimento Δx. Ao utilizar os comandos soma inferior e soma superior, para representar a área sob a curva, explora-se o conceito limite, o que leva a perceber que o limite da soma dos rectângulos por cima ou por baixo da curva se aproxima do valor da área sob a curva.

Deste modo, pode-se conceituar o Integral de Riemann como sendo o limite das somas de Riemann, quando o número de rectângulos tende para infinito, ou seja, a área de uma região limitada pelo eixo dos x, pelas rectas $x = a$ e $x = b$ e pelo gráfico da função $f(x)$, onde f é uma função contínua no intervalo $[a, b]$, isto é, $\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x = Area.$

7. Considerações finais

A TAS de Ausubel demonstrou-se importante para a pesquisa, uma vez que a identificação dos conhecimentos prévios, a partir do teste diagnóstico, antes da realização das actividades e nas discussões e reflexões dos estudantes durante o desenvolvimento, contribuiu para promoção da ocorrência da aprendizagem significativa.

Entretanto o uso do *GeoGebra*, na resolução das actividades de ensino, mostrou-se pertinente, pois o *software* possui características dinâmicas importantes para a aprendizagem dos estudantes, tendo propiciado o rompimento da representação algébrica e conectando-os as representações algébricas e gráficas.

O *software GeoGebra* possibilitou a realização de explorações visuais dinâmicas, que serviram de base para a compreensão da ideia intuitiva do conceito Integral de Riemann como limite de uma soma, o que levou os estudantes a alterarem a sua maneira de agir, pensar e questionar, uma vez que experimentaram uma nova forma de aprender.

Ao se pensar no *software GeoGebra* para o ensino e aprendizagem do Integral de Riemann, pretende-se, dentre outras coisas, que o estudante seja capaz de construir conceitos, investigar e significar soluções numéricas, a partir do seu campo visual, fazendo com que não continue passivo no processo de construção do conhecimento e se distancie da aprendizagem reprodutiva.

Com o uso do *software*, os estudantes ficaram interessados em resolver outros exercícios, que não faziam parte das actividades propostas para a pesquisa tendo nalgum momento testado os resultados dos exercícios sobre Integral de Riemann resolvidos na sala de aulas. O facto de os estudantes testarem alguns resultados, por meio do *software GeoGebra*, aponta indícios de atribuição de significados às variáveis envolvidas, uma das condições da aprendizagem significativa.

Percebemos com a realização das actividades, assim como a partir dos comentários dos estudantes, que o software *GeoGebra* é um recurso didáctico que facilita a compreensão do conteúdo a partir da visualização e manipulação e desperta, no estudante, a capacidade de conjecturar e tirar conclusões a partir daquilo que observa na tela do computador.

Em geral, a utilização do *GeoGebra*, nas aulas de Matemática, pode significar uma ruptura com o ensino de alguns conceitos apresentados quase que exclusivamente por noções algébricas e simbólicas, resgatando a exploração de conceitos matemáticos por meio da visualização, investigação e experimentação das actividades.

Deste modo, esperamos que este estudo sirva de fonte de inspiração aos professores de Análise Matemática da AM e não só, para a mudança de sua postura metodológica, aliando a introdução do novo conhecimento aos conhecimentos prévios e ao uso do quadro e giz às TICs.

Neste contexto, é importante que a AM conceba programas de capacitação de professores de Matemática, sobre a utilização de TIC, na sala de aulas, em particular dos *softwares* educacionais matemáticos.

O estudo tem como limitação o facto de ter sido realizado com apenas vinte estudantes e cinco professores da mesma instituição. Para tal há necessidade de se realizarem estudos mais abrangentes.

Por fim, é relevante enfatizar a necessidade de pesquisas que envolvam: a produção de sequências didácticas sobre conceitos de CÁLCULO usando *GeoGebra*; o uso de *softwares* educacionais nas aulas de Matemática bem como na formação de professores de Matemática.

8. Referências

Ausubel, David Paul.; Novak, Joseph Donald: & Hanesian, Helen (1980). *Psicologia cognitiva*. (2ª.ed,). Tradução de: Eva Nicketal. Rio de Janeiro, Brasil: Editora Interamericana.

Alves, Francisco Regis Vieira. (2016). Análises preliminares e a análise a *priori* para a noção de Integrais Dependentes de Parâmetros. *Vidya*, *36 (1)*, 111-133.

Bardin, Laurence. (2016). *Análise de conteúdo*. (3ª.ed.). São Paulo, Brasil: Edições 70.

Barufi, Maria Cristina Bonomi. (1999). *A construção / negociação de significados no curso universitário inicial de Cálculo Diferencial e Integral*. Tese de Doutorado. Universidade de São Paulo, São Paulo, Brasil.

D'Ambrósio, Ubiratan. (2008). *Educação matemática: da teoria à prática*. (16ª. ed.) São Paulo, Brasil: Papirus editora.

Fontes, Liviam Santana. (2021). *As metodologias ativas de aprendizagem e sua contribuição para o ensino de Cálculo Diferencial e Integral*. Tese de Doutorado. Universidade de Brasília, Brasília, Brasil.

Machado, Rosa Maria. (2008). *A visualização na resolução de problemas de Cálculo Diferencial e Integral no ambiente computacional MMP*. Tese de Doutorado. Universidade Estadual de Campinas, Campinas, Brasil.

Marcuschi, Luis António. (2007). *Análise da conversação*. (6ª. Ed.). São Paulo, Brasil: Editora Ática.

Marin, Douglas. (2009). *Professores de matemática que usam Tecnologia de Informação e Comunicação no Ensino Superior*. Dissertação de Mestrado. Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, Brasil.

Mateus, Pedro. (2014). *Derivadas de funções reais de uma variável real e integral de Riemann: construção e aprendizagem de conceitos mediadas por mídias e práticas usuais*. Tese de Doutorado. Universidade Anhanguera de São Paulo, São Paulo, Brasil.

Mateus, Pedro. (2018). *Ensino e aprendizagem da Matemática: o mérito da integração da* *tecnologia do GeoGebra nas práticas usuais.* Comunicação apresentada no II Fórum Nacional de Educação, Maputo, Moçambique.

Melo, José Manuel Ribeiro de. (2002). *Conceito de integral: uma proposta computacional para o seu ensino e aprendizagem.* Dissertação de Mestrado – Pontifícia Universidade Católica, São Paulo, Brasil.

Menoncini, Lúcia. (2018). *O jogo das operações semióticas na aprendizagem da Integral Definida no cálculo de área.* Tese de Doutoramento, Universidade Federal de Santa Catarina, Brasil.

Miskulin, Rosana Giaretta Sguerra; Escher, Marco António; & Silva, Carla Regina Mariano. (2007). A Prática Docente do Professor De Matemática no Contexto das TICs: uma experiência com a utilização do MAPLE em Cálculo Diferencial. *Revista de Educação Matemática*, *10 (11)*, 29-37.

Moreira, Marco António. (2011). *Teorias de aprendizagem.* (2ª.ed.). São Paulo, Brasil: Editora Pedagógica e Universitária.

Moreira, Marco António (2016). *Subsídios teóricos: A Teoria da Aprendizagem Significativa.* (2ª.ed.). Porto Alegre, Brasil.

Oliveira, Maria Marly de. (2016). (7ª. Ed.) *Como fazer pesquisa qualitativa.* Petrópolis, Brasil: editora vozes.

Oliveira, João Lucas. de & Reis, Frederico da Silva. (2017). Utilizando o *GeoGebra* para a construção do Conceito de Integral de Riemann no ensino de Análise Real. *Vidya*, *37 (2)*, 417-434.

Ponte, João Pedro da. (2003). Investigação sobre investigações matemáticas em Portugal. *Investigar em Educação*, *2*, 93-169.

Ponte, João Pedro da. (2006). Estudos de caso em Educação Matemática. *Bolema*, *25*, 105-132.

Richit, Andriceli. (2010). *Aspectos conceituais e instrumentais do conhecimento da prática do professor de cálculo diferencial e integral no contexto das tecnologias digitais.* Dissertação de Mestrado. Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, Brasil.

Silva, Armando Paulo da. (2017). *A modalidade EAD Semipresencial e a disciplina de Cálculo Diferencial e Integral*. Tese de doutorado. Universidade Estadual Paulista, Bauru, Brasil.

Stewart, James. (2009). *Cálculo – Vol 2*. (6ª.ed.) São Paulo, Brasil: Thomson Pioneira.

Villarreal, Mónica Ester . (1999). *O pensamento matemático de estudantes universitários de Cálculo e Tecnologias Informáticas*. Tese de Doutorado. Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, Brasil.